

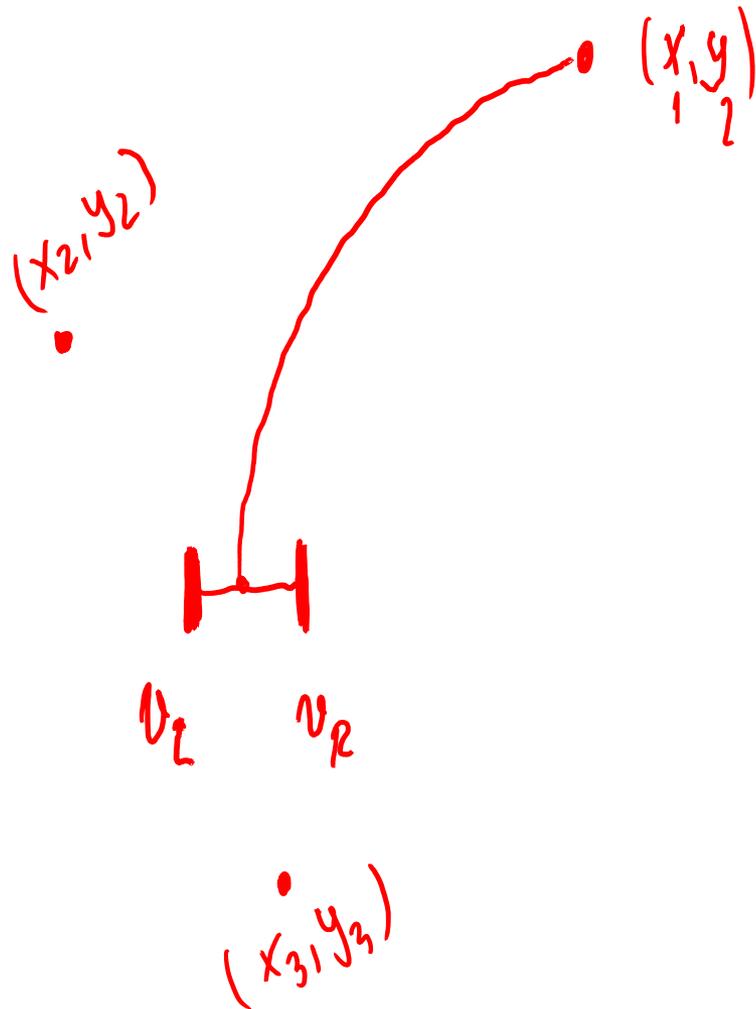
Robotik I: Einführung in die Robotik

Inverse Kinematik

Tamim Asfour

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)





$$u^i = f(x, y)$$

Inhalt

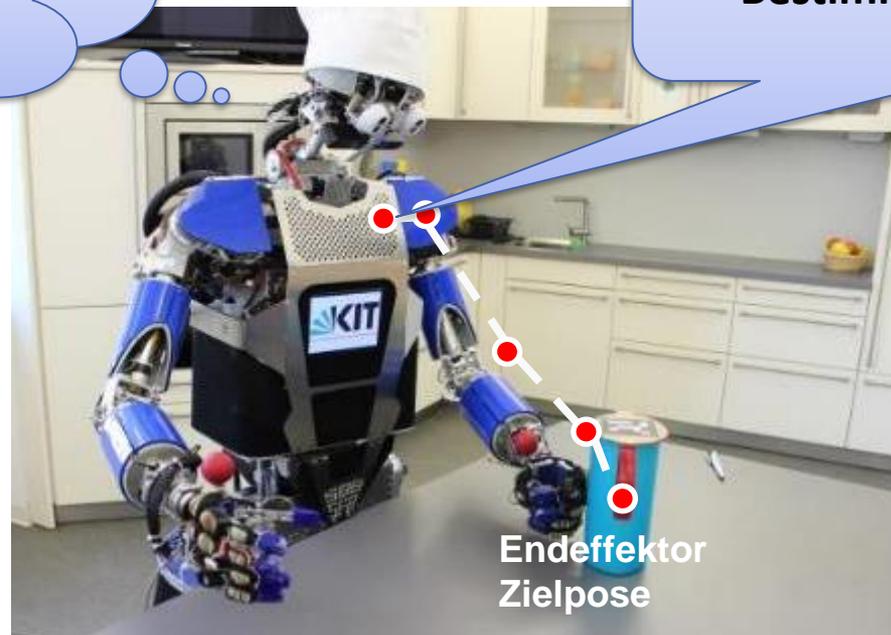
- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden

Inverse Kinematik

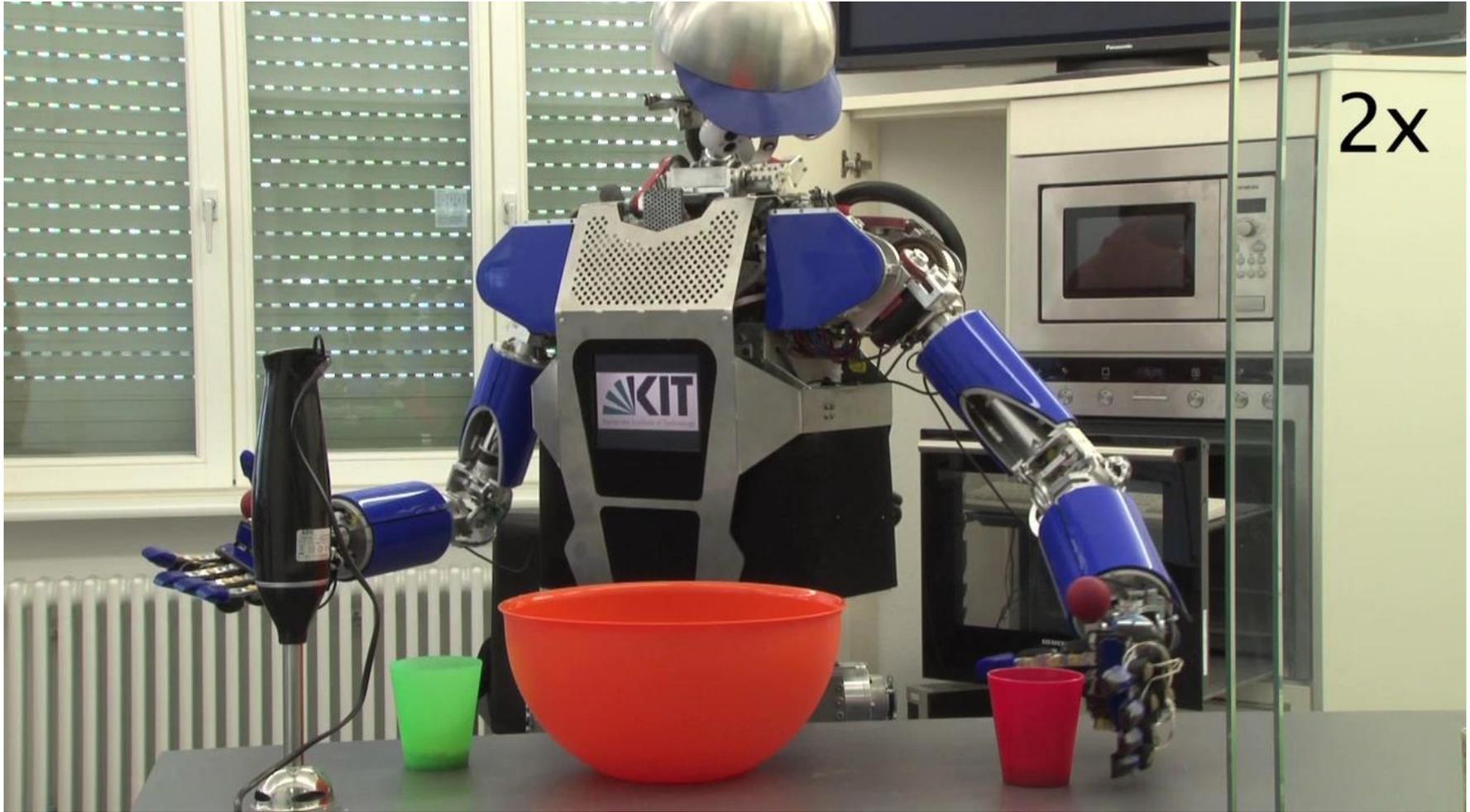
- **Inverses** kinematisches Problem (Rückwärtskinematik)
 - **Bestimmung der Gelenkwinkelstellungen** zu einer gewünschten Lage des Endeffektors.

Wie bewege ich
meine Hand
zum Becher?

Inverse Kinematik:
Bestimmt die Gelenkwinkel



Inverse Kinematik



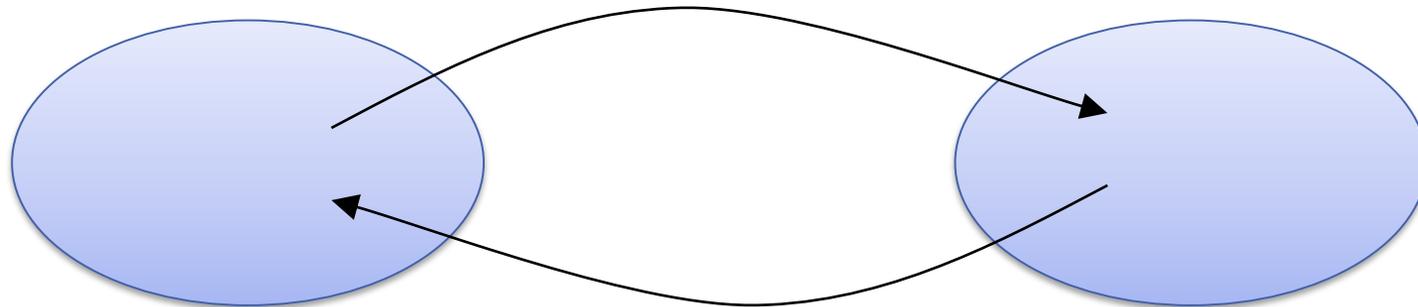
Inverse Kinematik: Problemstellung

Gelenkwinkelraum
(Configuration Space)
 $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$x = f(\theta)$$

Kartesischer Raum
(Workspace)
 $W = \mathbb{R}^m$

Direkte Kinematik

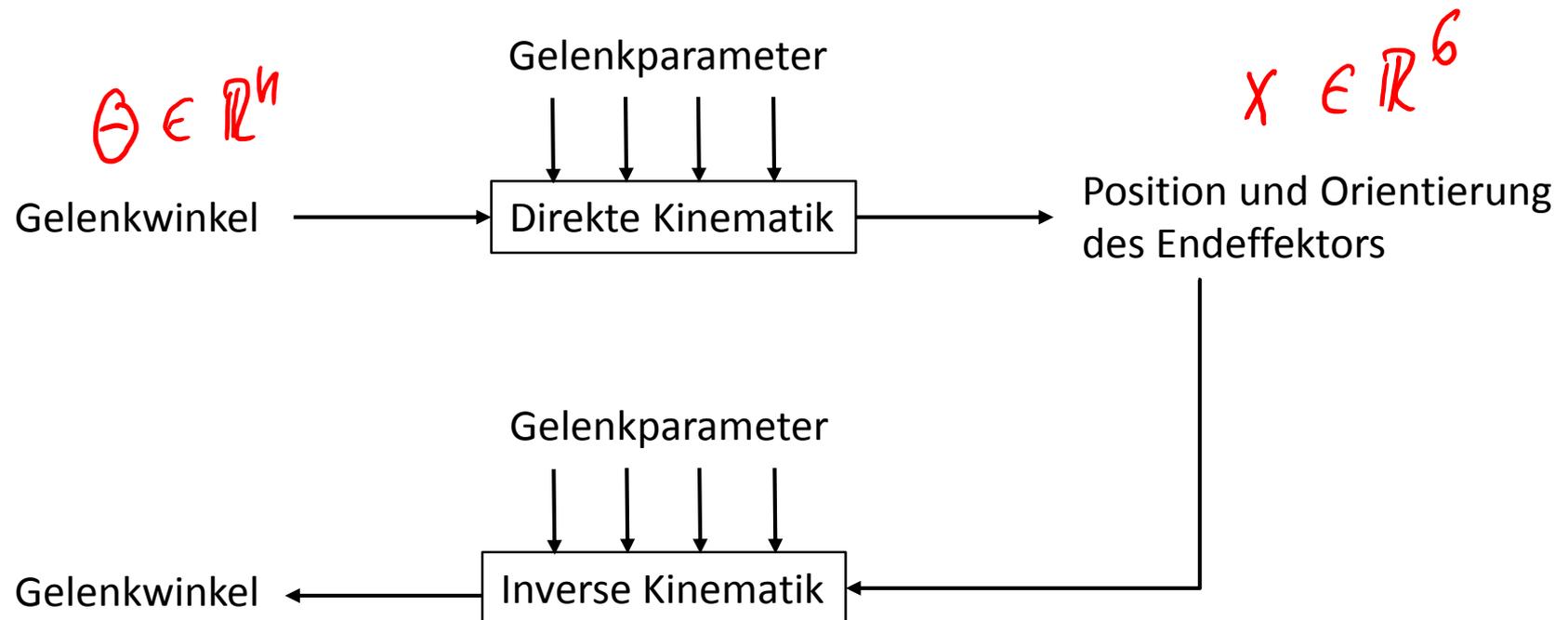


Inverse Kinematik

$$\theta = f^{-1}(x), \text{ z.B. } \dot{\theta} = j^{-1}(\theta) \cdot \dot{x}$$

n: Bewegungsfreiheitsgrade
 m: Freiheitsgrade

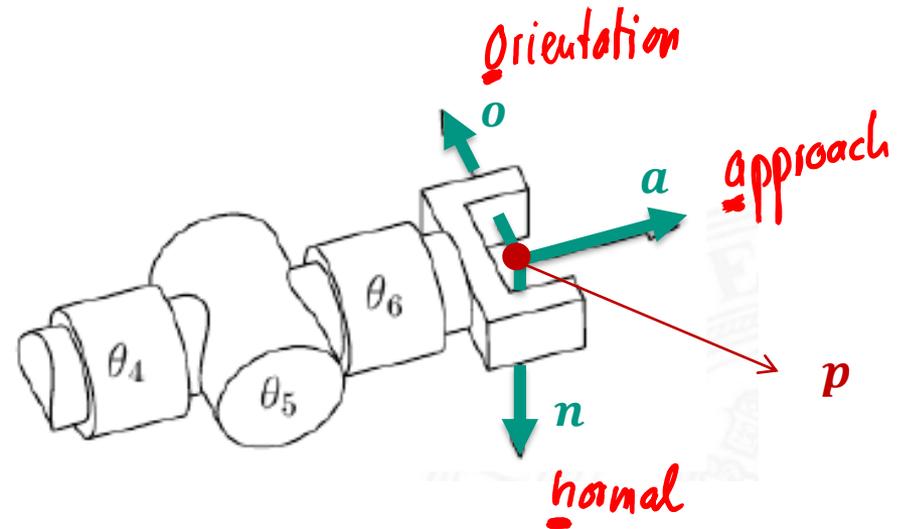
Direkte und Inverse Kinematik



Inverse Kinematik: Vorgehensweise

vorgegeben ↓ ? ↓
 Lage des TCP:

$$P_{TCP} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



? ↓
 Kinematisches Modell:

$$P_{TCP} = {}^{BKS}T_{TCP}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n)$$

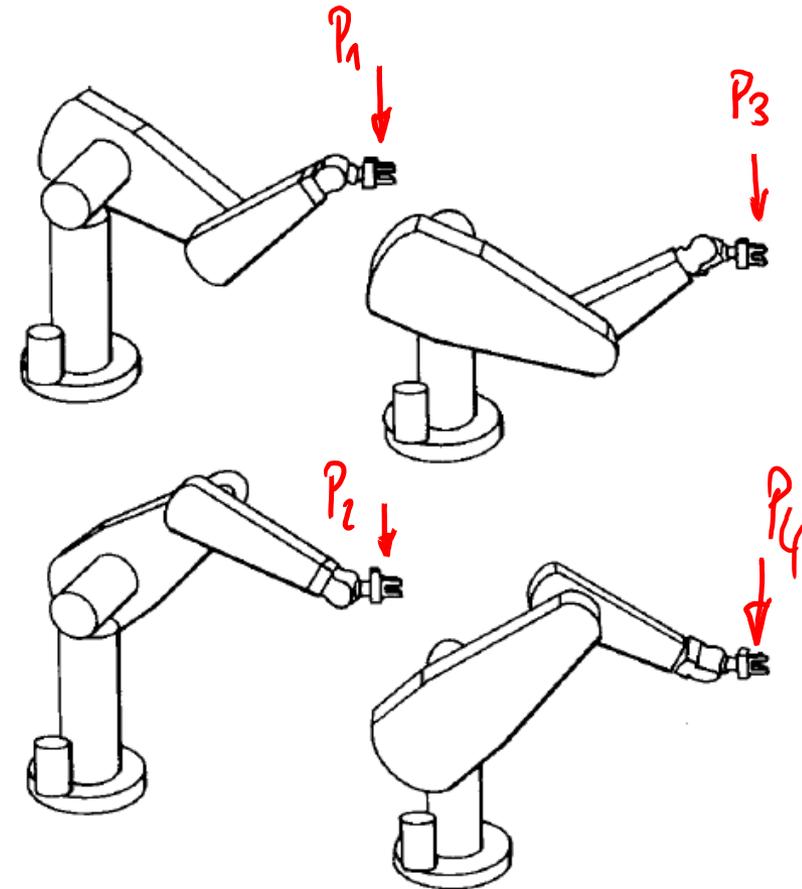
Gegeben: P_{TCP}

Gesucht: θ

Ansatz: Gleichung nach θ auflösen (**nichtlineares Problem**)

Inverse Kinematik: Eindeutigkeit

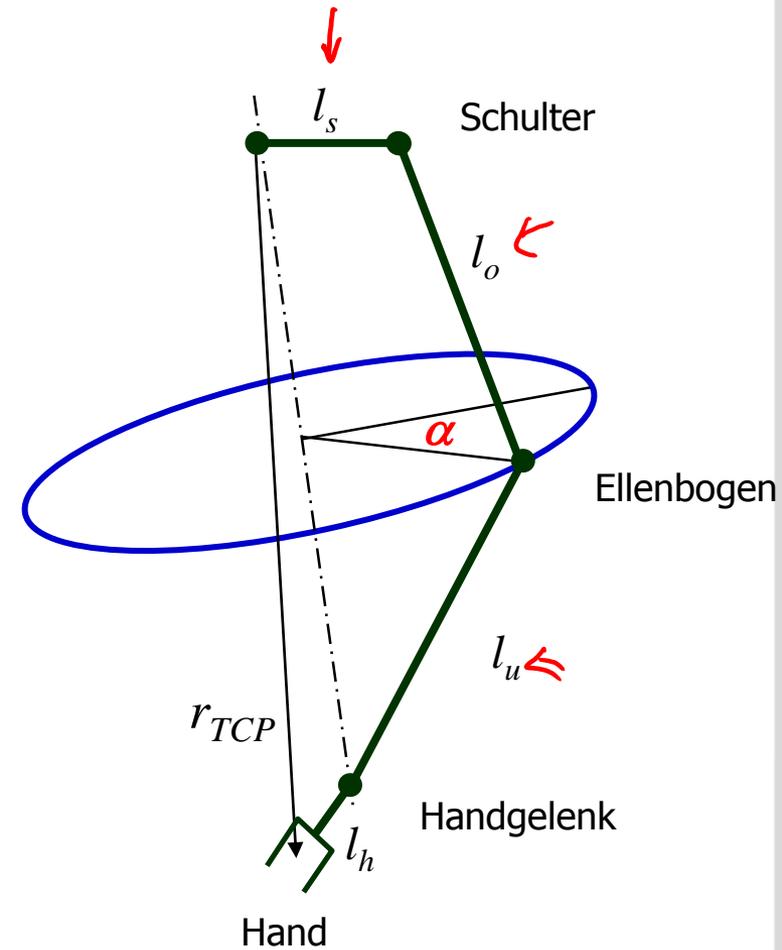
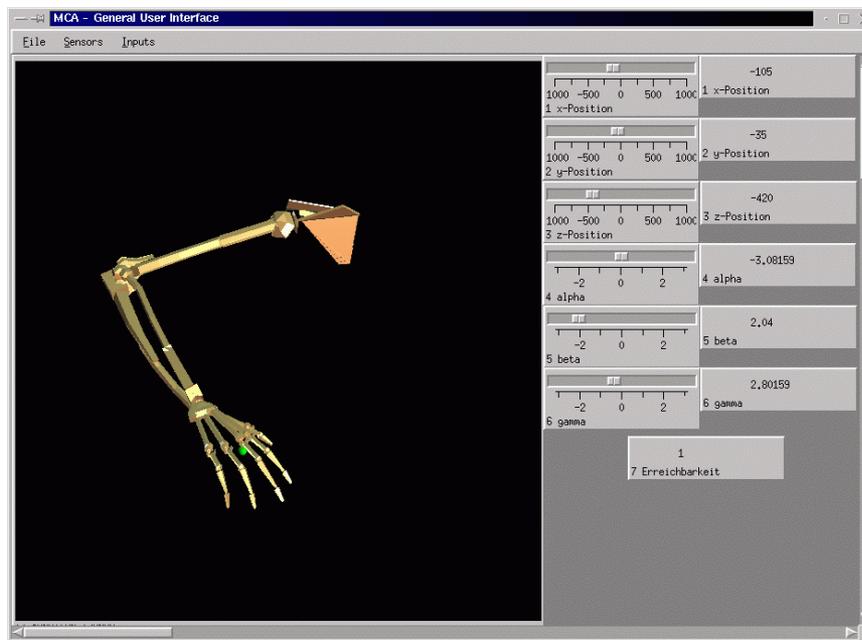
- In der **Ebene** gibt es für Systeme mit $n \geq 3$ Bewegungsfreiheitsgraden mehrere Möglichkeiten, eine vorgegebene Endeffektorstellung zu erreichen.
- In $SE(3)$ gilt dies für alle Roboter mit $n \geq 6$ Bewegungsfreiheitsgraden.
- **Reduktionsstellungen** sind solche, zu deren Erreichen $n < 6$ Bewegungsfreiheitsgrade ausreichen würden.



Gleiche Endeffektorstellung bei unterschiedlichen Konfigurationen

Redundanz des menschlichen Arms

12 DoF



Inhalt

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden

$$C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$$

$n = m$: nicht redundante Rob.

$n > m$: redundante Rob.

$$\Gamma \approx n - m$$

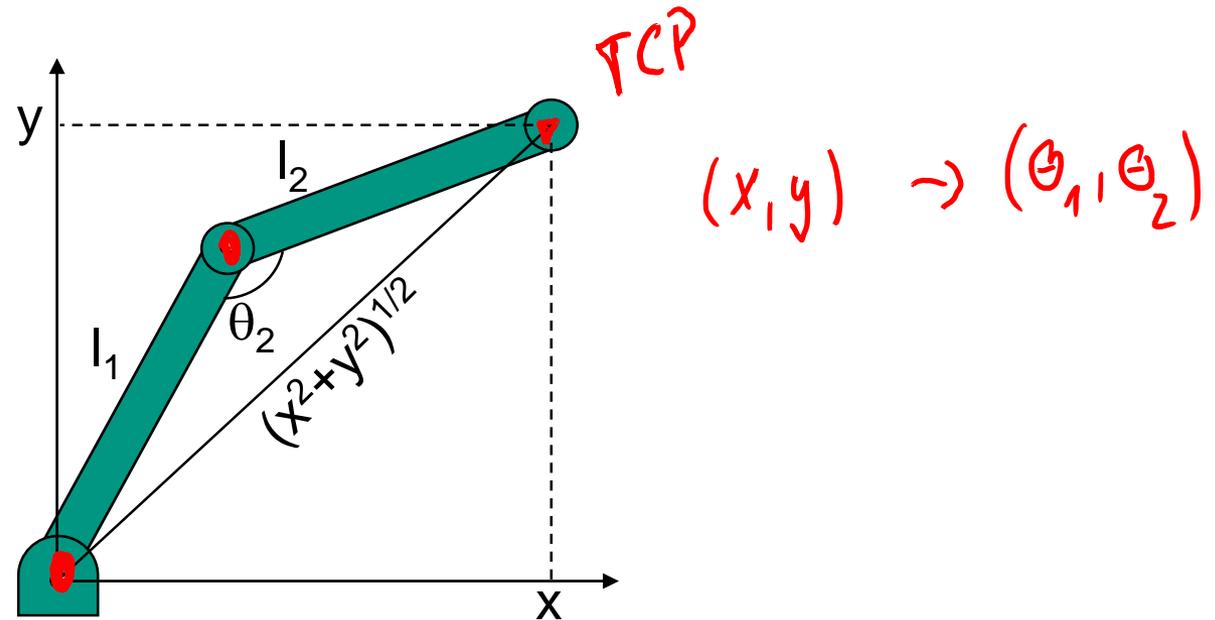
Geometrische Methode: Vorgehen

- Nutze **geometrische Beziehungen**, um die Gelenkwinkel θ aus der T_{TCP} zu bestimmen.
- Das kinematische Modell wird dabei nicht direkt verwendet.

Anwendung von:

- Trigonometrischen Funktionen
- Sinus- / Kosinussätzen

Geometrische Methode: Beispiel

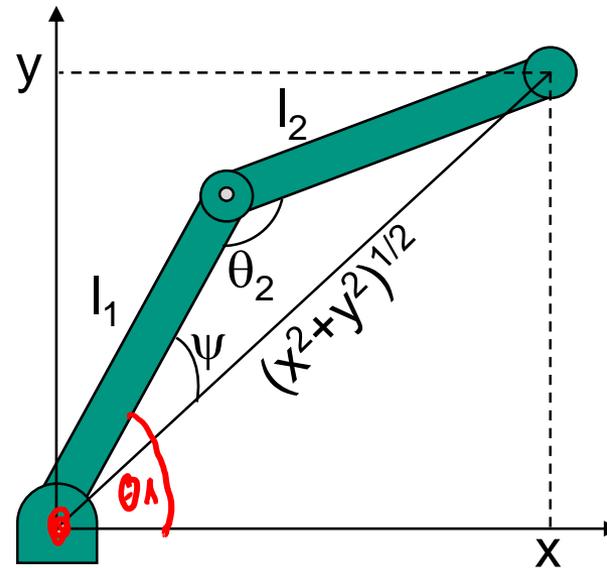


■ Mit Kosinussatz:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) = -\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \rightarrow \theta_2$$

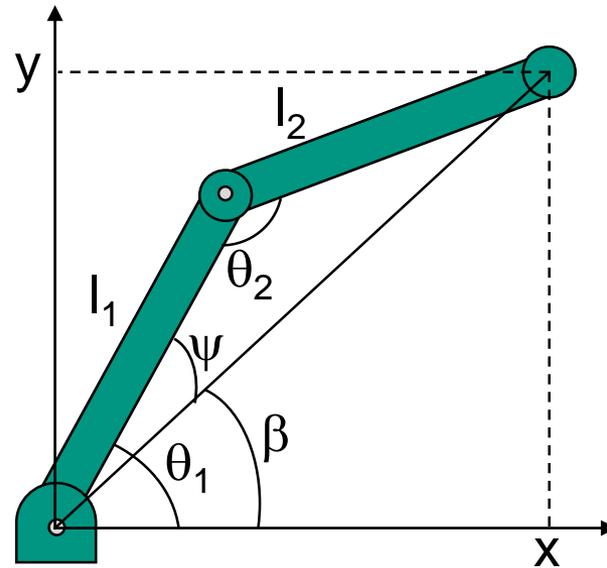
Geometrische Methode: Beispiel (2)



$$l_2^2 = x^2 + y^2 + l_1^2 - 2l_1 \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\psi)$$

$$\rightarrow \cos(\psi) = \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Geometrische Methode: Beispiel (3)



$$\tan(\beta) = \frac{y}{x}; \quad \theta_1 = \psi + \beta$$

Geometrische Methode: Polynomialisierung

- **Transzendente Gleichungen** sind in der Regel schwer zu lösen, da die Variable θ gewöhnlich in der Form $\cos \theta$ bzw. $\sin \theta$ auftritt.
- Werkzeug: **Substitution**

$$u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

unter Verwendung von:

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}$$

➔ **Auflösen von Polynomgleichungen**

Inhalt

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden

Algebraische Methoden

- Gleichsetzen von TCP Pose P_{TCP} und Transformation ${}^{BKS}T_{TCP}$ aus dem kinematischen Modell:

$$P_{TCP} = {}^{BKS}T_{TCP}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{pmatrix} n & 0 & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \dots$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Koeffizientenvergleich** der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \in [1:n]$$

- 16 Gleichungen bei homogenen Matrizen in 3D (4 trivial: 0=0, 1=1)

➔ **12 nicht-triviale Gleichungen**

Algebraische Methoden: Beispiel (1)

■ Aus kinematischem Modell

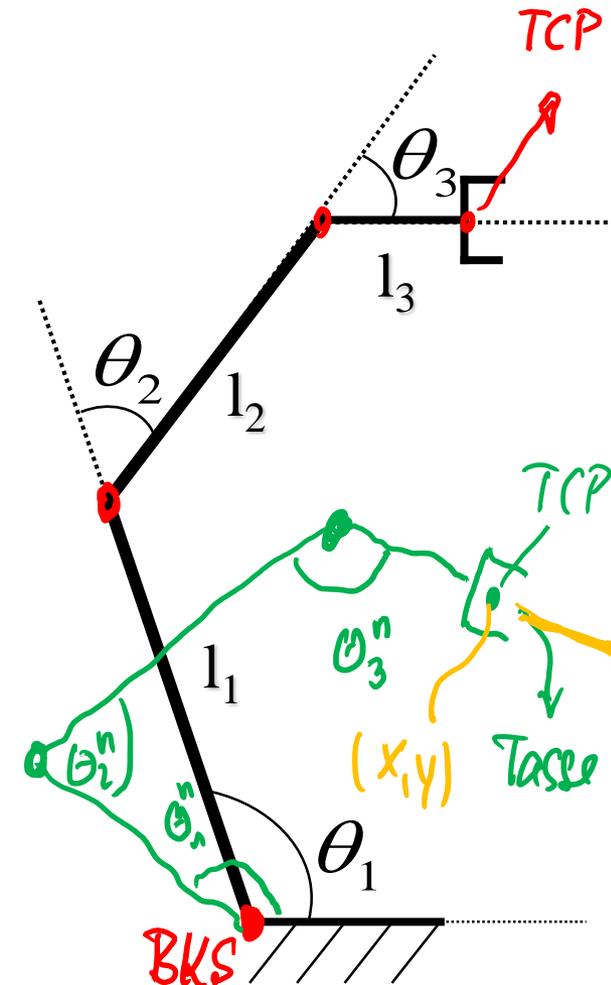
$$\begin{aligned}
 {}^{BKS}T_{TCP} &= A_{0,3} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3); \quad s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

■ Gewünschte Lage des Endeffektors im Raum

■ Position(x,y), Orientierung(ϕ)

$$P_{TCP} = \begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Algebraische Methoden: Beispiel (2)

■ Koeffizientenvergleich

$$\begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

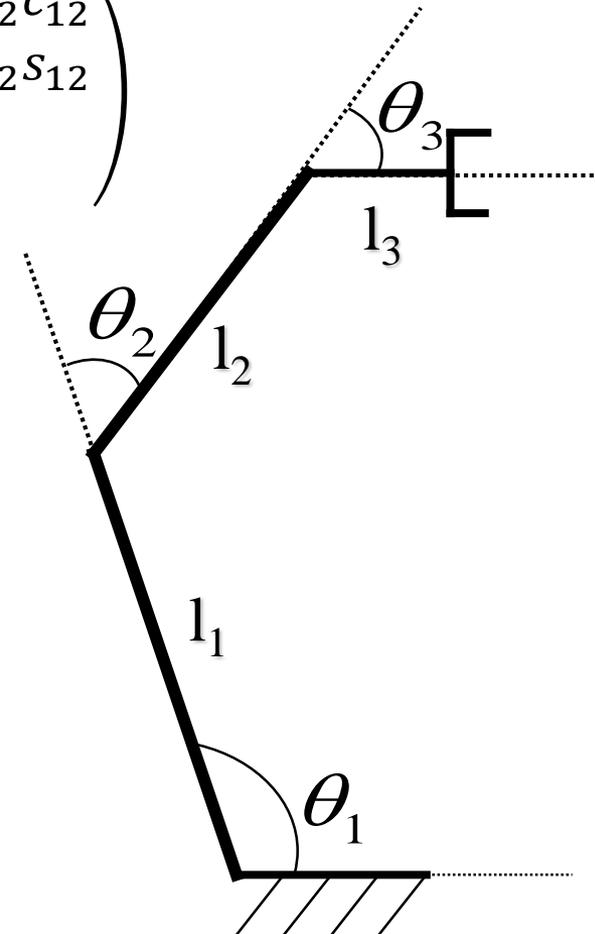
$$c_\phi = c_{123} \quad (1)$$

$$s_\phi = s_{123} \quad (2)$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \quad (3)$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \quad (4)$$

➔ Nach θ auflösen



Algebraische Methoden: Beispiel (3)

- Summe der Quadrate von (3) und (4)

$$x^2 = l_1^2 c_1^2 + 2l_1 c_1 l_2 c_{12} + l_2^2 c_{12}^2$$

$$y^2 = l_1^2 s_1^2 + 2l_1 s_1 l_2 s_{12} + l_2^2 s_{12}^2$$

$$s_1^2 + c_1^2 = 1; \quad s_{12}^2 + c_{12}^2 = 1$$

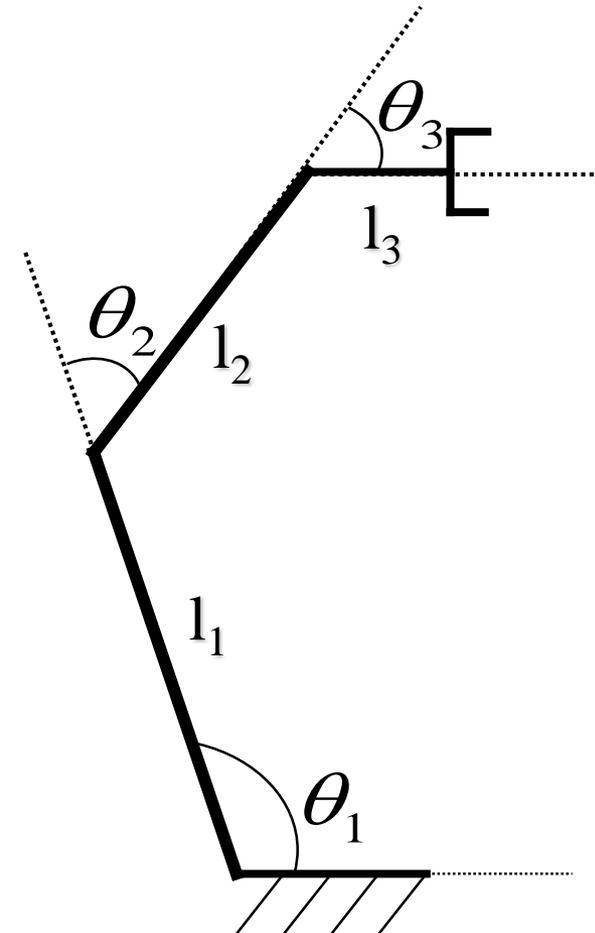
$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12})$$

$$= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \rightarrow \theta_2$$

- **Zwei Lösungen** für θ_2 sind möglich. Warum?

→ **Redundanz**



Algebraische Methoden: Beispiel (4)

- Berechnung von θ_1

- Aus Koeffizientenvergleich:

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_2$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_2$$

- Additionstheorem: $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$

$$x = l_1 c_1 + l_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2)$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 (s_1 c_2 + s_2 c_1)$$

- Vereinfachen:

$$x = (l_1 + l_2 c_2) c_1 - (l_2 s_2) s_1$$

$$y = (l_1 + l_2 c_2) s_1 + (l_2 s_2) c_1$$

➔ Auflösung schwierig.
 Hilfe durch Schablonen für typische Gleichungen (MAPLE).

Algebraische Methoden: Lösungsalgorithmus

■ Problem

- Oft können nicht alle Gelenkwinkel aus den 12 Gleichungen bestimmt werden.

■ Ansatz

- Kenntnis der Transformationen erhöht Chance, die Gleichungen zu lösen.

■ Gegeben

- Die Transformationsmatrizen $A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot \dots \cdot A_{n-1,n}$ und P_{TCP}

■ Gesucht

- Die Gelenkwinkel θ_1 bis θ_n

Algebraische Methoden: Vorgehensweise

■ Algorithmus zur algebraischen Lösung

$$■ P_{TCP} = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot A_{2,3}(\theta_3) \cdot A_{3,4}(\theta_4) \cdot A_{4,5}(\theta_5) \cdot A_{5,6}(\theta_6)$$

$$A_{0,1}^{-1}(\theta_1) \cdot P_{TCP} = A_{1,2}(\theta_2) \cdot A_{2,3}(\theta_3) \cdot \dots \cdot \dots$$

■ Vorgehensweise:

1. Invertiere $A_{0,1}(\theta_1)$ und multipliziere beide Seiten der Gleichung mit $A_{0,1}^{-1}$
2. Versuche aus dem neu entstehenden Gleichungssystem eine Gleichung zu finden, die nur eine Unbekannte enthält und löse diese Gleichung nach der Unbekannten.
3. Versuche eine Gleichung im Gleichungssystem zu finden, die durch die Substitution der im letzten Schritt gefundenen Lösung nach eine Unbekannten lösbar ist.
4. Falls keine Lösungen mehr gefunden werden können, so muss eine weitere Matrix ($A_{1,2}(\theta_2)$) invertiert werden.
5. Wiederhole die Schritte 1 - 4 bis alle Gelenkwinkel ermittelt sind.

Algebraische Methoden: Gleichungen

$$T_{TCP} = \underline{A_{0,1}} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot \underline{A_{5,6}}$$

$$A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot A_{0,1}^{-1} \cdot T_{TCP} = \underline{A_{5,6}}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} = A_{0,1} \cdot A_{1,2}$$

$$T_{TCP} \cdot A_{5,6}^{-1} \cdot A_{4,5}^{-1} \cdot A_{3,4}^{-1} \cdot A_{2,3}^{-1} \cdot A_{1,2}^{-1} = A_{0,1}$$

$$\Theta_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Theta_2 = f_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

⋮
0

$$\Theta_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

Geschlossene

Lösung des IK-Problems

Inhalt

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden

Numerische Methoden: Jacobi-Matrix (Wdh.)

- Gegeben eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Die **Jacobi-Matrix** enthält sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung von f . Für ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$J_f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Es gilt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial f(\theta(t))}{\partial t} = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

$$x = f(\theta) \quad \Downarrow \quad \dot{x} = J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta) \cdot \dot{x} \quad \Downarrow$$

$$\theta = \int J^{-1}(\theta) \cdot \dot{x} \cdot dt$$

Numerische Methoden: Linearisierung

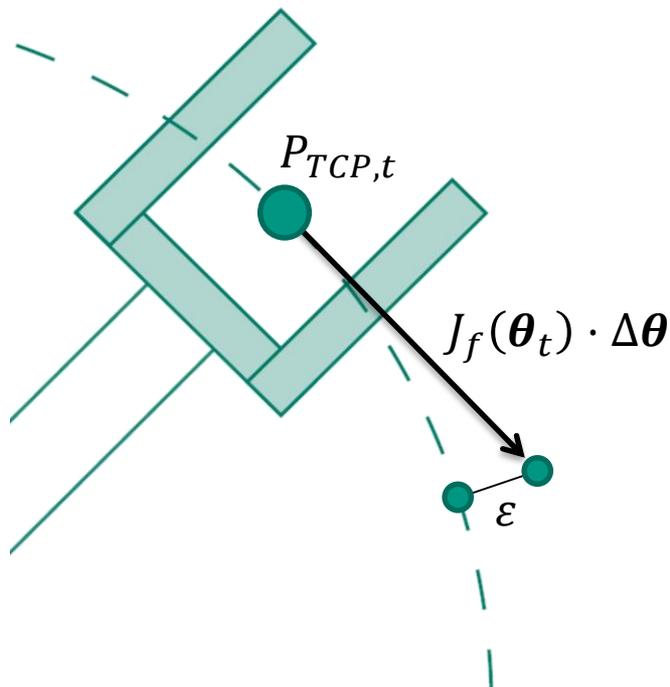
- TCP-Pose über **Vorwärtskinematik**:

$$P_{TCP,t} = f(\boldsymbol{\theta}_t)$$

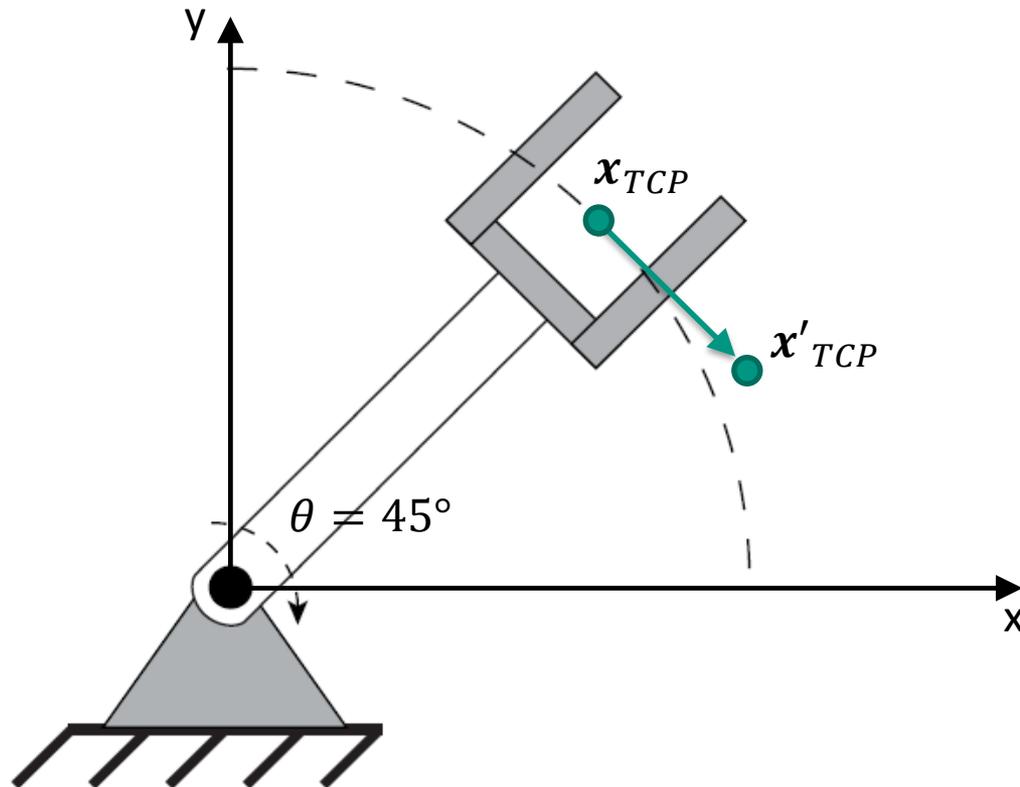
- Jacobi-Matrix liefert **Bewegungstangenten** in der aktuellen Stellung $\boldsymbol{\theta}_t$

$$J_f(\boldsymbol{\theta}_t) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\theta}_t)}{\partial \boldsymbol{\theta}_t}$$

- **Annahme**: Modell gültig für kleine $\Delta\boldsymbol{\theta}$
 - **Lineare Approximation** der Bewegung
 - Approximationsfehler ε existiert

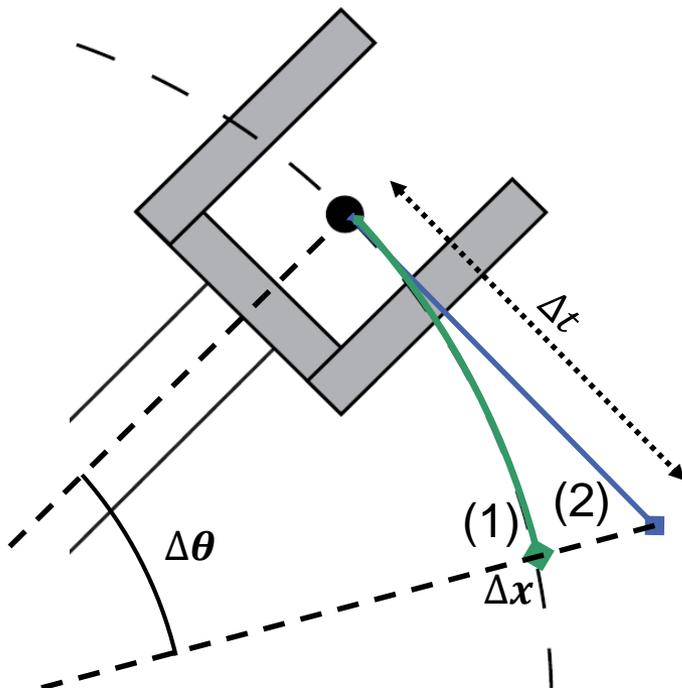


Numerische Methoden: Beispiel



$$J_f(\theta) = J_f(45^\circ) = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Numerische Methoden: Differenzenquotient



- (1) Tatsächliche Bewegung gemäß:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$$
- (2) Angenäherte Bewegung im Intervall Δt mittels Differenzenquotient:

$$\Delta \mathbf{x} \approx J(\boldsymbol{\theta})\Delta \boldsymbol{\theta}$$
- Approximation der Änderung durch Übergang vom Differentialquotienten zum **Differenzenquotienten**
- Linearisierung des Problems

Numerische Methoden: Umkehrung

- Bisher erreicht: **Lokale, lineare Annäherung an die Vorwärtskinematik**

$$\Delta \mathbf{x} = f(\Delta \boldsymbol{\theta}) \approx J_f(\boldsymbol{\theta}) \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}$$

- **Gesucht:** Lösung für das inverse Problem

$$\Delta \boldsymbol{\theta} \approx F(\Delta \mathbf{x}) = J_f^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \Delta \mathbf{x}$$

- Invertierung ist möglich, wenn:
 - $J_f(\boldsymbol{\theta})$ quadratisch ist
 - $J_f(\boldsymbol{\theta})$ vollen Rang hat

Numerische Methoden: Pseudoinverse

■ Ansatz: Pseudoinverse

Verallgemeinerung der inversen Matrix auf singuläre und nicht-quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

■ Moore-Penrose Pseudoinverse (bei vollem Zeilenrang*)

$$A^\# = A^T (AA^T)^{-1}$$

■ Es gelten:

- $(A^\#)^\# = A$
- $(A^T)^\# = (A^\#)^T$
- $(\lambda A)^\# = \lambda^{-1} A^\#$, für ein $\lambda \neq 0$

* Voller Zeilenrang ist bei J_f üblicherweise gegeben.

Ausnahme: **Singularitäten!**

Pseudoinverse: Herleitung

- **Problem:** Berechne die im Sinne der Summe der Fehlerquadrate (least squares) bestmögliche Lösung eines Systems von linearen Gleichungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad // A \text{ ist a rechteckige Matrix, nicht invertierbar}$$

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \quad // A^T A \text{ ist eine quadratische Matrix, invertierbar}$$

$$\underbrace{(A^T A)^{-1} A^T A}_{I} \mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A^\#} \mathbf{b} \quad // \hat{\mathbf{x}} \text{ ist eine Least-Squares-Lösung von } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = A^\# \mathbf{b} \quad // A^\# \text{ ist die Pseudoinverse von } A$$

Numerische Methoden: Zusammenfassung

1. Vorwärtskinematik als Funktion:

$$\mathbf{x}(t) = f(\boldsymbol{\theta}(t))$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^6$: TCP-Pose

$\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$: Gelenkwinkelstellungen

2. Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}(t) = J_f(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^6$: TCP-Geschwindigkeiten

$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \in \mathbb{R}^n$: Gelenkgeschwindigkeiten

$J_f(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$: Jacobi Matrix

3. Übergang zum Differenzenquotienten:

$$\Delta \mathbf{x} \approx J_f(\boldsymbol{\theta})\Delta \boldsymbol{\theta}$$

$\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$: Fehler in der TCP-Pose

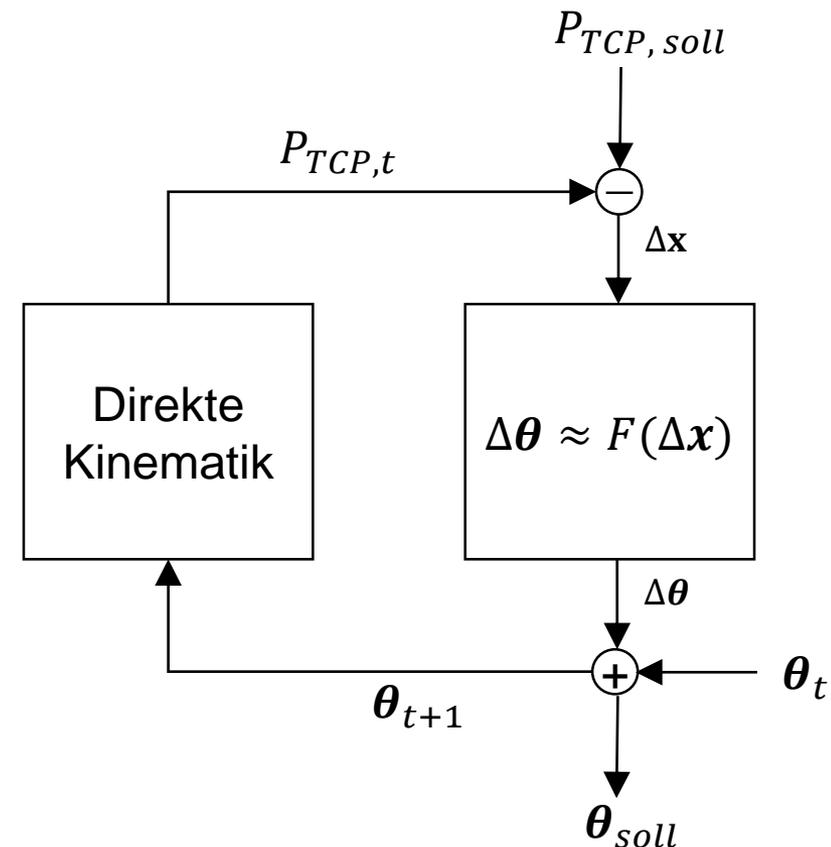
$\Delta \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$: Fehler in Gelenkstellungen

4. Umkehrung:

$$\Delta \boldsymbol{\theta} \approx J_f^\#(\boldsymbol{\theta})\Delta \mathbf{x}$$

Numerische Methoden: Iteratives Vorgehen

- **Gegeben:** Sollpose des TCP $P_{TCP, soll}$
- **Gesucht:** Gelenkwinkelvektor θ , der $P_{TCP, soll}$ realisiert
- **Iterativer Ansatz** beginnend bei Initialkonfiguration θ_0 und $P_{TCP,0}$
 1. Berechne $P_{TCP,t}$ in Iteration t aus Gelenkwinkelstellungen θ_t
 2. Berechne Fehler Δx aus $P_{TCP, soll}$ und berechneter $P_{TCP,t}$
 3. Benutze approximiertes inverses kinematisches Modell F , um Gelenkwinkelfehler $\Delta \theta$ zu berechnen
 4. Berechne $\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta \theta$
 5. Fahre mit Iteration $t + 1$ fort



Numerische Methoden: Beispiel (I)

■ Position:

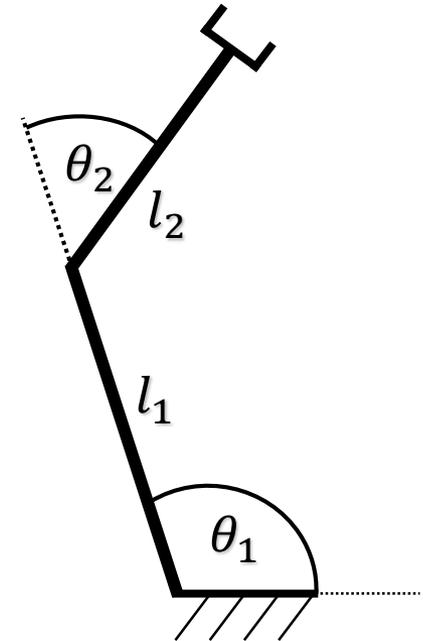
$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

■ Geschwindigkeit:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_f(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = J_f(\boldsymbol{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$



Numerische Methoden: Beispiel (II)

- Die Jacobi-Matrix muss invertiert werden:

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{l_1 l_2 \sin \theta_2}_{J_f(\boldsymbol{\theta})^{-1}}} \begin{pmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_2 c_{12} - l_1 c_1 & -l_1 s_{12} - l_1 s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Abkürzungen:

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$c_i = \cos(\theta_i)$$

$$s_i = \sin(\theta_i)$$

- Für $\theta_2 = 0^\circ, \pm 180^\circ$ ist $J_f(\boldsymbol{\theta})$ singulär!

Numerische Methoden: Singularitäten

- Pseudoinverse ist in der Nähe von Singularitäten instabil
- Umgang mit Singularitäten
 - Vermeidung von Singularitäten
(nicht immer möglich)
 - **Damped least squares**
(auch **Levenberg-Marquardt Minimierung**)

Numerische Methoden: Damped Least Squares (I)

- Die Pseudoinverse $J_f^\#(\boldsymbol{\theta})$ löst die Gleichung $J_f(\boldsymbol{\theta})\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\mathbf{x}$ optimal nach $\Delta\boldsymbol{\theta}$.
- „Optimal“ bezieht sich auf die Summe der Fehlerquadrate

$$\min_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \|J_f(\boldsymbol{\theta})\Delta\boldsymbol{\theta} - \Delta\mathbf{x}\|_2^2$$

- **Ansatz:** Minimiere stattdessen

$$\min_{\Delta\boldsymbol{\theta}} \|J_f(\boldsymbol{\theta})\Delta\boldsymbol{\theta} - \Delta\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda^2 \|\Delta\boldsymbol{\theta}\|_2^2$$

mit einer **Dämpfungskonstante** $\lambda > 0$.

Numerische Methoden: Damped Least Squares (II)

■ Ansatz:

$$\min_{\Delta \boldsymbol{\theta}} \left\| J_f(\boldsymbol{\theta}) \Delta \boldsymbol{\theta} - \Delta \mathbf{x} \right\|_2^2 + \lambda^2 \|\Delta \boldsymbol{\theta}\|_2^2$$

■ Die zugehörige Gleichung ist

$$(J^T J + \lambda^2 E) \Delta \boldsymbol{\theta} = J^T \Delta \mathbf{x}$$

■ Daraus ergibt sich

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \underbrace{(J^T J + \lambda^2 E)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} J^T \Delta \mathbf{x} = J^T \underbrace{(J J^T + \lambda^2 E)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \Delta \mathbf{x}$$

■ Hier: $J = J_f(\boldsymbol{\theta})$, $m = 6$

Numerische Methoden: Damped Least Squares (III)

■ Ansatz:

$$\Delta\theta = \underbrace{(J^T J + \lambda^2 E)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} J^T \Delta\mathbf{x} = J^T \underbrace{(J J^T + \lambda^2 E)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \Delta\mathbf{x}$$

- Die Dämpfungskonstante $\lambda > 0$ muss anwendungsspezifisch gewählt werden
 - **Groß genug** für numerische Stabilität in Umgebungen von Singularitäten
 - **Klein genug** für schnelle Konvergenzrate

■ Hier: $J = J_f(\boldsymbol{\theta})$

Numerische Methoden: Stabilitätsbetrachtung (I)

- Beide Ansätze (**Pseudoinverse** und **Damped Least Squares**) können durch Singularitäten instabil werden
- Eine Analyse der Stabilität ist über eine **Singulärwertzerlegung** möglich
- Singulärwertzerlegung: Eine Matrix $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird dargestellt durch zwei orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$, in der Form:

$$J = UDV^T$$

- O. B. d. A.: **Singulärwerte** σ_i auf der Diagonalen von D seien sortiert:
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0.$$

Numerische Methoden: Stabilitätsbetrachtung (II)

- Singulärwertzerlegung: $J = UDV^T$
- Die Singulärwertzerlegung von J existiert immer und sie erlaubt die folgende Darstellung von J

$$J = \sum_{i=1}^m \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

- wobei \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i die Spalten von U und V sind, sowie $r = \text{rang } J$.
- Für die Pseudoinverse $J^\#$ gilt (durch Orthogonalität von U und V):

$$J^\# = VD^\#U^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$$

Numerische Methoden: Stabilitätsbetrachtung (III)

- Erinnerung **Damped-Least-Squares**: $\Delta\theta = J^T (JJ^T + \lambda^2 E)^{-1} \Delta\mathbf{x}$

- Für die innere (zu invertierende) Matrix gilt:

$$JJ^T + \lambda^2 E = (UDV^T)(VD^T U^T) + \lambda^2 E = U(DD^T + \lambda^2 E)U^T$$

- $DD^T + \lambda^2 E$ ist eine **nicht-singuläre** Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\sigma_i^2 + \lambda^2$. Daher ist $(DD^T + \lambda^2 E)^{-1}$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $(\sigma_i^2 + \lambda^2)^{-1}$.

- Es folgt:

$$J^T (JJ^T + \lambda^2 E)^{-1} = VD^T (DD^T + \lambda^2 E)^{-1} U^T = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$$

Numerische Methoden: Stabilitätsbetrachtung (IV)

- Pseudoinverse:

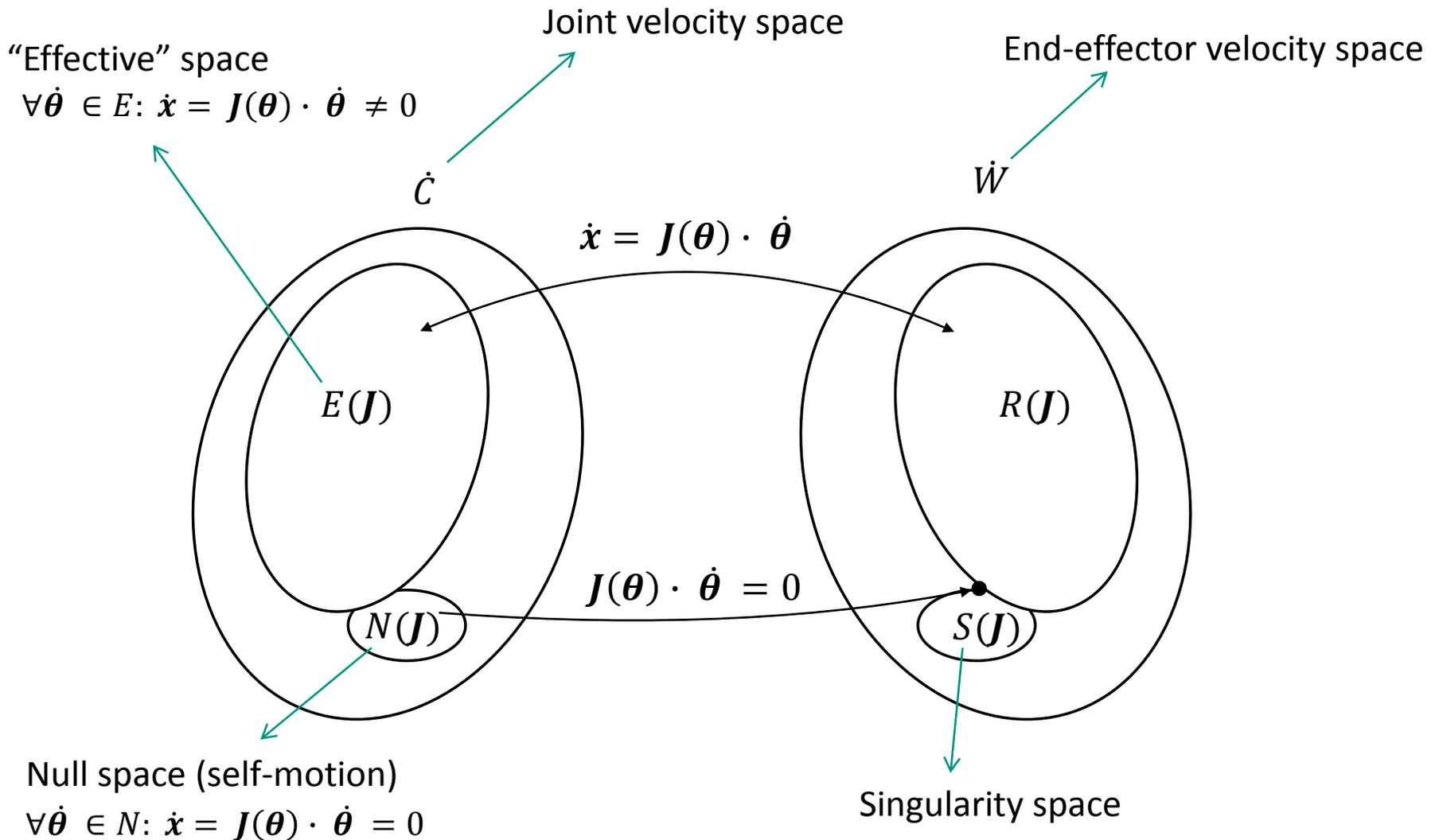
$$J^\# = \sum_{i=1}^r \underbrace{\frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T}_{\rightarrow \infty (\sigma_i \rightarrow 0)}$$

- Damped-Least-Squares:

$$J^T (J J^T + \lambda^2 E)^{-1} = \sum_{i=1}^r \underbrace{\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T}_{\rightarrow 0 (\sigma_i \rightarrow 0)}$$

- Die Invertierung von J hat in beiden Fällen eine ähnliche Form.
- Die Pseudoinverse wird instabil, wenn ein $\sigma_i \rightarrow 0$ (Singularität)
- Für große σ_i (verglichen mit λ) verhält sich Damped-Least-Squares wie die Pseudoinverse
- Für $\sigma_i \rightarrow 0$ verhält sich Damped-Least-Squares wohldefiniert

Important spaces



Inhalt

- Inverses Kinematisches Problem
- Geschlossene Methoden
 - Geometrische Methoden
 - Algebraische Methoden
- Numerische Methoden
- Zusammenfassung

Zusammenfassung: Kinematik

■ Direkte Kinematik:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{\theta})$$

■ Inverse Kinematik:

$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{\theta} = F(\boldsymbol{x})$$

■ Fälle:

- Es existiert eine eindeutige Lösung.
- Es existiert eine endliche Menge von Lösungen.
- Es existiert eine unendliche Menge von Lösungen.
- Es existiert keine Lösung.

Zusammenfassung: Verfahren

Allgemeine Verfahren

- Numerische Verfahren
- Allgemeine Lösungsverfahren für Gleichungssystem

➡ hoher Aufwand

➡ lange Zeitdauer

Spezielle Verfahren

- Auf trigonometrische Beziehungen basierende graphische Verfahren

➡ schnell

➡ nur für speziellen Robotertyp